$\boxed{\text{復習}}$ $\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x)\right)\psi = 0$

$\psi = \exp\left(\int^x P\,dx\right)$, $P = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{n-1} P_n(x)$

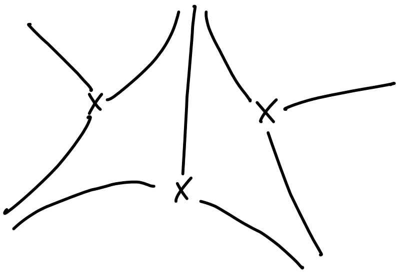
Stokes グラフ

$\theta \in \mathbb{R}$ 方向

WKB解 $\psi_\pm(x,\hbar) = \frac{1}{\sqrt{P_{odd}(x,\hbar)}} \exp\left(\pm\int^x P_{odd}(x',\hbar)\,dx'\right)$

$\boxed{\text{例}}$ $Q(x) = x^3 + ax + b$ $(a, b, c:\text{generic})$

$\boxed{x\text{平面}}$



$\mathrm{Im}\left(e^{-i\theta}\int_v^x \sqrt{Q}\,dx\right) = 0$

Borel 総和可能性について

$$T(x,\hbar) := \sum_{n\geq 2} \hbar^n P_n(x) = \hbar\left(P(x,\hbar) - \frac{1}{\hbar}P_0(x) - P_1(x)\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} - 2P_0(x)\frac{T}{\hbar} = T^2 + \cdots$$ ← P_0, P_1 で書ける.

↓ Borel変換 (項別の逆Laplace変換) $\hbar^{-1} \longleftrightarrow y$

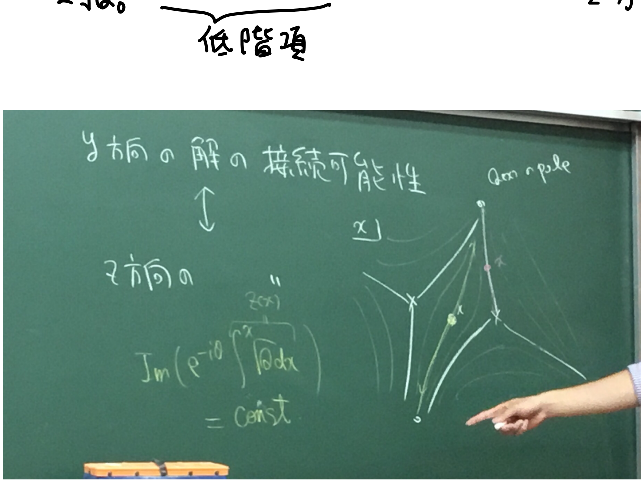
$$\frac{\partial T_B}{\partial x} - 2\underbrace{P_0(x)}_{=\sqrt{Q(x)}}\frac{\partial T_B}{\partial y} = T_B * T_B + \cdots$$

$(f*g)(y) := \int_0^y f(y')g(y-y')\,dy'$ convolution product

↓ 座標変換 $z(x) := \int^x \sqrt{Q(x)}\,dx$

$$\frac{\partial T_B}{\partial z} - 2\frac{\partial T_B}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{Q_0}}\underbrace{\left(T_B * T_B + \cdots\right)}_{\text{低階項}}$$

y 方向の解の接続可能性 ⟷ z 方向の解の接続可能性

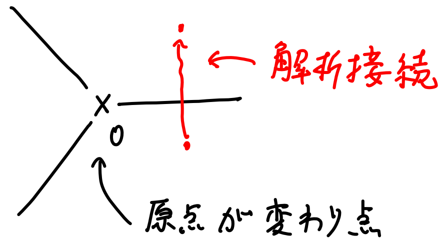


今日やること

- “変わり点で正規化”したWKB解のBorel和がStokes曲線上でみたす接続公式を記述する.

3. Vorosの接続公式

Stokesグラフ $\theta=0$



まずAiry方程式の場合に考える.

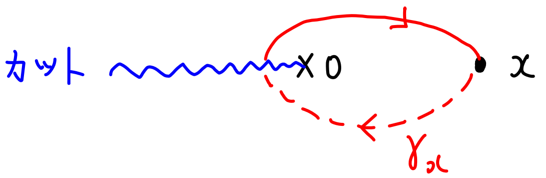
$$\left(\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}-x\right)\psi=0,\qquad Q(x)=\sqrt{x}$$

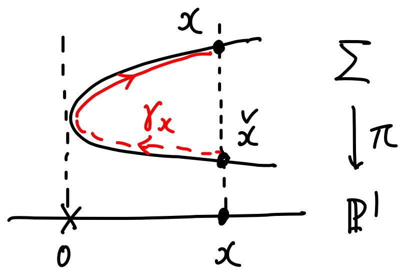
変わり点$(x=0)$で正規化されたWKB解を考える.

$$\psi_\pm=\frac{1}{\sqrt{P_{odd}(x,\hbar)}}\exp\left(\pm\int_0^x P_{odd}(x',\hbar)\,dx'\right).$$

ただし, P_{odd}の各係数は$x=0$に特異性を持つので$\int_0^x$を次のように定義する.

$$\int_0^x P_{odd}(x',\hbar)\,dx' := \frac{1}{2}\int_{\gamma_x} P_{odd}(x',\hbar)\,dx'$$





$P_{odd}(x,\hbar)=\frac{1}{2}(P_+-P_-)$ by def. なので $P_{odd}(\check{x},\hbar)=-P_{odd}(x,\hbar)$.

だから, $\frac{d}{dx}\int_{\gamma_x}P_{odd}(x',\hbar)\,dx' = P_{odd}(x,\hbar)-P_{odd}(\check{x},\hbar)=2P_{odd}(x,\hbar)$.

$\left(\boxed{例}\quad \int_0^x x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\Big[(-2)x^{-\frac{1}{2}}\Big]_{\check{x}}^{x}=(-2)x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$\psi_\pm(x,\hbar)=\exp\left(\pm\int_0^x\sqrt{x'}\,dx'\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\hbar^{n+\frac{1}{2}}\psi_n^{(\pm)}(x)$$ ← 形はバシッと決まる.

これのBorel変換

$$\psi_{\pm,B}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi_n^{(\pm)}(x)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}(y\pm a(x)),\qquad a(x)=\int_0^x\sqrt{x'}\,dx'=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

は超幾何函数で書ける.

つづき。

超幾何函数 $\displaystyle {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n\, n!} z^n$, $\quad (\alpha)_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & (n\geq 1) \end{cases}$

を使うと、上の $\Psi_{\pm,B}(x,y)$ は次のように書ける（全然非自明）：

$$\begin{cases} \Psi_{+,B}(x,y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{x} s^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};s\right), \quad s := \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\dfrac{y}{x^{3/2}} \\ \Psi_{-,B}(x,y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{x}(s-1)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};1-s\right) \end{cases}$$

レポート問題 4 この等式を示せ。□

$$Ai(z) = \sum \frac{\Gamma(\ )\Gamma(\ )}{\Gamma(\ )} z^{-\frac{3}{2}n} \xrightarrow{\text{Borel 変換}} \sum \frac{\Gamma(\ )\Gamma(\ )}{\Gamma(\ )\Gamma(\ )} z^{-\frac{3}{2}n} \leftarrow \text{超幾何}$$

歴史 がんばって計算した結果を佐藤先生が見て ${}_2F_1\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};\cdot\right)$ だと言い当てた。

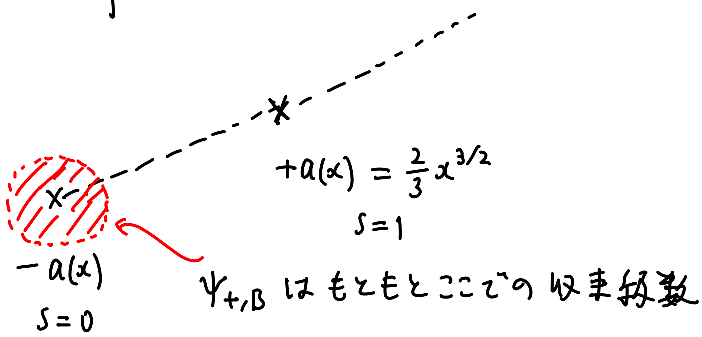
$\Psi_{+,B}$ に注目する。

事実 ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;s)$ は $s=0,1,\infty$ にのみ確定特異点をもつ。
（特に $s\to\infty$ で高々多項式増大）

$a(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$

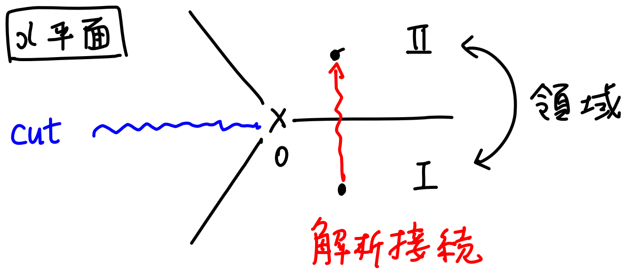
$s = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{y}{x^{3/2}}$	y
0	$-a(x)$
1	$+a(x)$
∞	∞

y 平面



- $x=0$（変わり点）において 2つの特異点 $\pm a(x)$ は一致する。
- $x\neq 0$ を固定したとき、$\arg(a(x)-(-a(x))) = \arg a(x)$ の方向には解析接続できない。
  $\mathrm{Im}(e^{-i\theta}a(x)) \neq 0$ となるような方向には解析接続可能。（Ψ_+ は Borel 総和可能）
  $\int_0^x \sqrt{x'}\,dx'$ の Stokes グラフの条件と consistent。

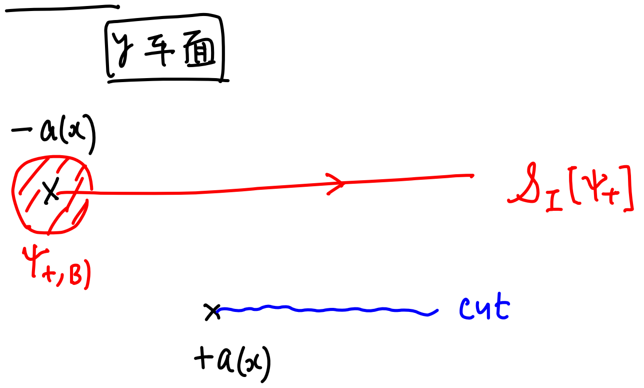
$\theta=0$ のときの Airy eq. の Stokes グラフ



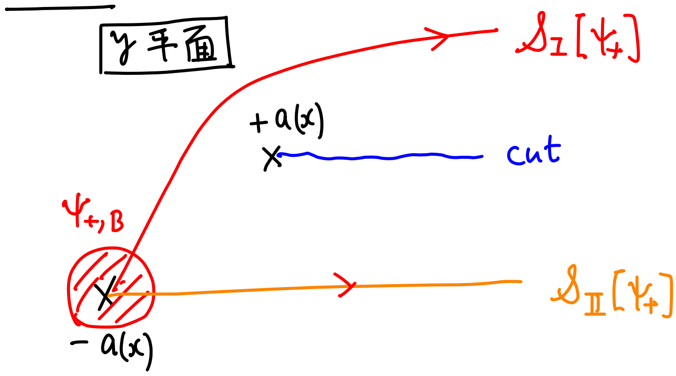
$$\mathcal{S}_J[\psi_\pm] := \begin{pmatrix}\text{領域}J\text{における}\\ \psi_\pm\text{の Borel sum}\end{pmatrix}$$

$(J=\mathrm{I},\mathrm{II})$　　$\theta=0$ 方向の

$x\in\mathrm{I}$



$x\in\mathrm{II}$



これらを比較すると

$$\mathcal{S}_{\mathrm{I}}[\psi_+]-\mathcal{S}_{\mathrm{II}}[\psi_+]=\int_{+a(x)} e^{-\frac{y}{\hbar}}\,\psi_{+,B}(x,y)\,dy$$

実は

$$\int_{+a(x)} e^{-\frac{y}{\hbar}}\,\psi_{+,B}(x,y)\,dy \;=\; i\int_{+a(x)} e^{-\frac{y}{\hbar}}\,\psi_{-,B}(x,y)\,dy = i\,\mathcal{S}_{\mathrm{II}}[\psi_-].$$

$s=0$ と $s=1$ での解の間の（非自明）関係式を用いた ← 超幾何の接続公式

ゆえに,

$$\mathcal{S}_{\mathrm{I}}[\psi_+]=\mathcal{S}_{\mathrm{II}}[\psi_+]+i\,\mathcal{S}_{\mathrm{II}}[\psi_-].$$

さらに上の議論と同様にして（$\pm a(x)$ の立場がひっくりかえる）, より簡単に

$$\mathcal{S}_{\mathrm{I}}[\psi_-]=\mathcal{S}_{\mathrm{II}}[\psi_-]$$

となることもわかる.

この公式を Airy の場合の Voros の接続公式と呼ぶ.

注

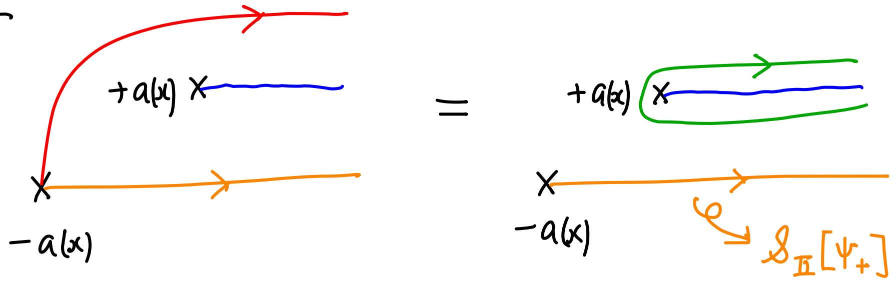
$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{Q(x)}{\hbar^2}\right)\psi=0$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-Q(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_B=0$$

unipotent matrix が出て来ることは詳しく計算しなくてもわかる.

$\underline{x \in \mathrm{II}}$



以上の計算ではすべてを計算できる Airy eq. の特殊性を使った.

一般の場合の公式も得られる

一般の場合

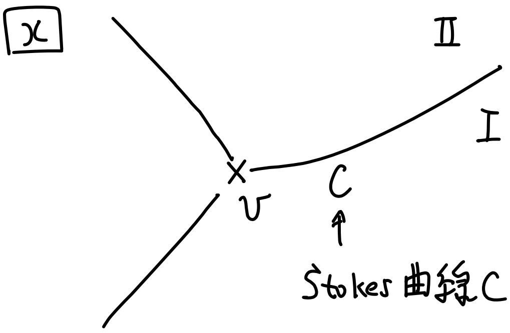
以下, $\theta = 0$ として考える.

Q(x)の1位の零点

(正確には $Q(x)dx^2$ の〜)

$\boxed{\text{仮定}}$ v を単純な変わり点とする.

v から生じる全ての Stokes 曲線は Stokes セグメントでないとする.



$$\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{P_{odd}}} \exp\left(\pm \int_v^x P_{odd}\, dx\right)$$

変わり点 v で Airyの場合と同様の方法で正規化された WKB解.

$\Psi_\pm^J$: 領域 J での $\psi_\pm$ の Borel 和.

$\boxed{\text{定理}}$ (Voros 1983, Aoki-Kawai-Takei 1991)

- C 上で $\mathrm{Re}\int_v^x \sqrt{Q}\,dx > 0$ のとき,

$$[\Psi_+^{\mathrm{I}}, \Psi_-^{\mathrm{I}}] = [\Psi_+^{\mathrm{II}}, \Psi_-^{\mathrm{II}}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix},$$

- C 上で $\mathrm{Re}\int_v^x \sqrt{Q}\,dx < 0$ のとき

$$[\Psi_+^{\mathrm{I}}, \Psi_-^{\mathrm{I}}] = [\Psi_+^{\mathrm{II}}, \Psi_-^{\mathrm{II}}] = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

証明は (Kawai-Takei Ch.2)

$\boxed{y}$

$\psi_{-,B}$
$\times$
$+\int_v^x \sqrt{Q}\,dx$

$\psi_{+,B}$
$\times$
$-\int_v^x \sqrt{Q}\,dx$

$\leftarrow$ (>0 の図)

$\mathrm{Re}\int_v^x \sqrt{Q}\,dx \gtrless 0$ は
2つの特異点のどっちが右にあるかを意味している

(<0 の図)

$\psi_{-,B}$
$\times$
$+\int_v^x \sqrt{Q}\,dx$

$\psi_{+,B}$
$\times$
$-\int_v^x \sqrt{Q}\,dx$

$\boxed{\text{定理}}$ (Voros 1983, Aoki-Kawai-Takei 1991)

- C 上で $\mathrm{Re}\int_v^x \sqrt{Q}\,dx > 0$ のとき、

$$[\Psi_+^{\mathrm{I}}, \Psi_-^{\mathrm{I}}] = [\Psi_+^{\mathrm{II}}, \Psi_-^{\mathrm{II}}]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix},$$

- C 上で $\mathrm{Re}\int_v^x \sqrt{Q}\,dx < 0$ のとき

$$[\Psi_+^{\mathrm{I}}, \Psi_-^{\mathrm{I}}] = [\Psi_+^{\mathrm{II}}, \Psi_-^{\mathrm{II}}]\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

証明は (Kawai-Takei Ch.2)

"WKB解析的変換論"

この等式は変わり点で正規化しないと成立してない。

一般の方程式のWKB解をAiry方程式のWKB解に形式的に変換する。

$$\psi_\pm(x,\hbar) = \left(\frac{\partial X}{\partial x}(x,\hbar)\right)^{-\frac{1}{2}} \psi_\pm^{\mathrm{Airy}}(X(x,\hbar),\hbar), \quad X(x,\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)\hbar^n, \quad \frac{dX_0}{dx} \neq 0,$$

$x=v$ の近くで正則

Borel総和可能な発散級数

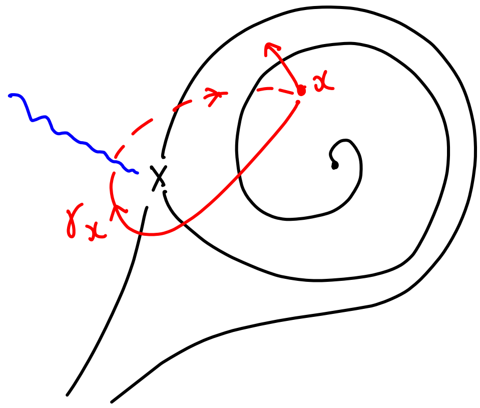
という形式的変換を作れる (そうむずかしくない)。
これをBorel変換する。

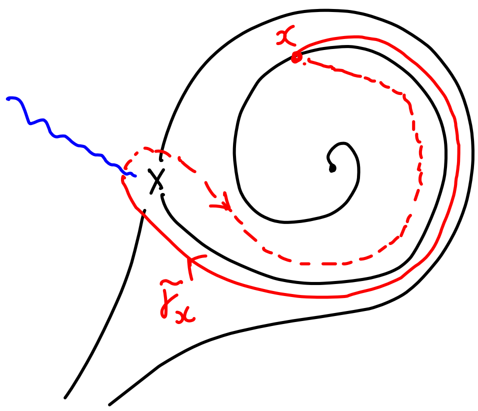
$$a(x) = \int_v^x \sqrt{Q}\,dx$$

$$\psi_{\pm,B}(x,y) = \int_{\mp a(x)}^{y} K(x, y-y')\,\psi_{\pm,B}^{\mathrm{Airy}}(X_0(x), y')\,dy'$$ の形になる。

カーネル K の性質がよいので左辺の y 平面での特異性が Airy の場合と同じになることがわかる。 Borel変換 $\frac{1}{\hbar} \mapsto \frac{\partial}{\partial y}$, $\hbar \mapsto \int^y dy$

(注) x が Stokes 曲線を越えるときに、
その Stokes 曲線に沿って正規化された WKB 解についてのみ
Voros の公式はなりたつ。





$\psi_\pm$: γ_x に沿って正規化
$\Longrightarrow$ Voros の公式は成立しない

$\tilde{\psi}_\pm$: $\tilde{\gamma}_x$ に沿って正規化
$\Longrightarrow$ Voros の公式が成立する。

$$\int_{\gamma_x} P_{odd}\, dx = \int_{\tilde{\gamma}_x} P_{odd}\, dx + \underbrace{2\oint_{x} P_{odd}\, dx}_{=r}$$

$$\psi_\pm = e^{\pm r}\,\tilde{\psi}_\pm \quad (\text{形式級数として})$$

$$[\Psi^{\mathrm{I}}_+, \Psi^{\mathrm{I}}_-] = [\Psi^{\mathrm{II}}_+, \Psi^{\mathrm{II}}_-]\, S, \quad S = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & ie^{2r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ie^{-2r} & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

正しくは $\mathcal{S}[e^{2r}]$

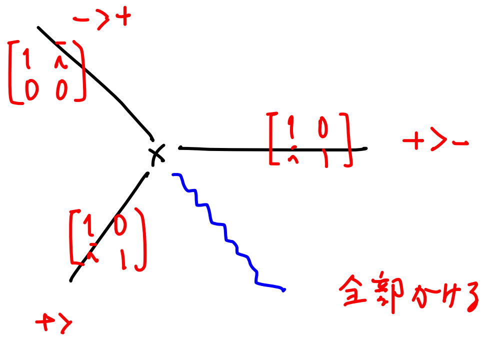
$\mathcal{S}[e^{-2r}]$

$\boxed{\text{レポート問題5}}$ Borel総和法で本当にx平面での解ができていること、

変わり点で正規化したWKB解のBorel和は
その変わり点の近傍で1価であることを示せ。
(つまり、Borel和はx平面上の函数である。)

Airyの場合にチェックすればよい。

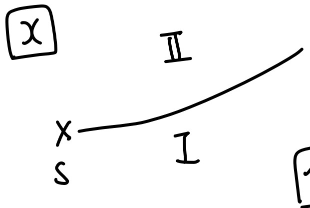
しかし、安直にやると失敗する。



これはなぜか？
↓
全部かけると $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \neq E$。

□

単純極における接続公式 (Koike 2000)



$\psi_\pm$: $x=s$ で正規化

$\boxed{\text{仮定}}$ $Q(x,\hbar) = Q_0(x) + \hbar^2 Q_2(x)$ → bを決める $\mapsto a$

Q_0：$x=s$で単純極

Q_2：$x=s$で高々2位の極

Tatsuya (神戸大)
↓

$\boxed{\text{定理}}$ (Koike 2000, Publ. RIMS, simple pole)

$$[\Psi^{\mathrm{I}}_+, \Psi^{\mathrm{I}}_-] = [\Psi^{\mathrm{II}}_+, \Psi^{\mathrm{II}}_-] S,$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & i(a+a^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i(a+a^{-1}) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} a = \exp\left(\pi i \overbrace{\sqrt{1+4b}}^{x=s\text{における特性指数の差}}\right) \\ b = \lim_{x\to s} (x-s)^2 Q_2(x) \end{cases}$$

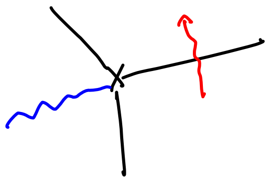
注 $Q(x,\hbar) = Q_0(x) + \hbar Q_1(x) + \hbar^2 Q_2(x) + \hbar^3 Q_3(x) + \cdots$ の一般の場合もできるが
めんどうな条件をつければBorel総和可能にできる。

大域問題への応用 (ここでも $\theta=0$ としておく)

仮定 $\begin{cases} \bullet\ Q(x)\,dx^2 \text{ の零点は全て1位.} \\ \bullet\ \text{Stokes セグメントがない.} \end{cases}$

WKB解のBorel和の解析接続は次の2パターンのくりかえしで書ける.

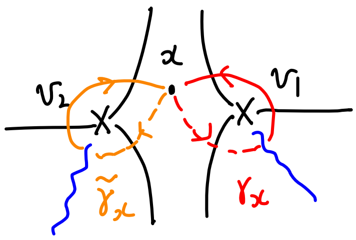
① Voros/Koike の公式

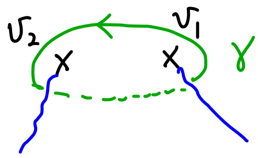


$$S = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

② 正規化のとりかえ

$$\int_{\gamma_x} P_{odd}\,dx = \int_{\tilde{\gamma}_x} P_{odd}\,dx + \oint_{\gamma} P_{odd}\,dx$$





ゆえに, $\psi_\pm = \exp\left(\pm\frac{1}{2}\oint_\gamma P_{odd}\,dx\right)\tilde{\psi}_\pm$.

これが大事.

定義 $\gamma \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ に対して,

$$V_\gamma(\hbar) := \oint_\gamma P_{odd}(x,\hbar)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^{2k-1}\oint_\gamma P_{2k}(x)\,dx \in \frac{1}{\hbar}\mathbb{C}[[\hbar]].$$

を γ に対する Voros 係数という. □

定義 $\beta \in H_1(\Sigma, P; \mathbb{Z})$ に対して,

P: $Q(x)dx^2$ の2位以上の poles の集合

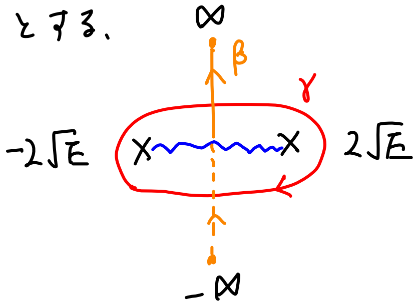
$$W_\beta(\hbar) := \int_\beta \left(P_{odd}(x,\hbar) - \frac{1}{\hbar}\sqrt{Q(x)}\right)dx$$

も β に対する Voros 係数という. □

例 (Weber 方程式)

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{x^2}{4} - E\right)\right)\psi = 0.$$

$E \neq 0$ とする.



$$\frac{t}{e^t-1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} t^{2n}$$

定理 (Voros 83, Takei 07)

$$V_\gamma(\hbar) = \frac{2\pi i E}{\hbar}$$

$$W_\beta(\hbar) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{1-2n}-1) B_{2n}}{2n(2n-1)} \frac{\hbar^{2n-1}}{E^{2n-1}}$$

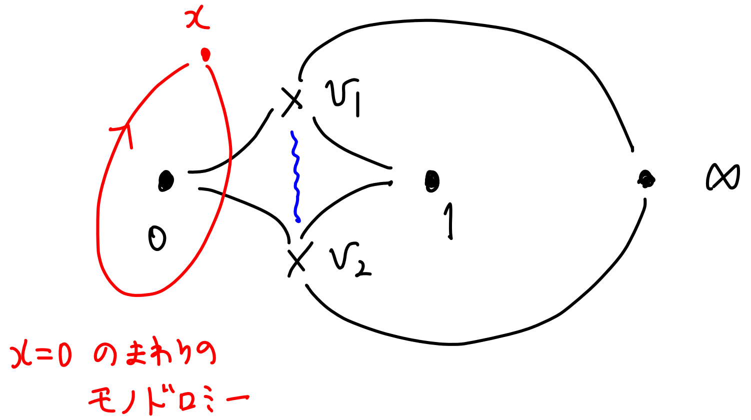
$$\log \frac{\Gamma\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} + \cdots \underset{\text{Stirling formula}}{\overset{\hbar \to 0}{\sim}}$$

$$2P_0 P_{n+1} + \sum_{n_1+n_2=n+1} P_{n_1} P_{n_2} + \frac{dP_n}{dx} = 0$$

$L = \hbar \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{2}$ のような昇降演算子を使うと, $W_\beta(\hbar)$ について E をずらしたときの方程式を出せる, それを解くと Bernoulli 数が出て来る

例 $Q(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2(x-1)^2}$ $(a, b, c \in \mathbb{C})$. $\longleftrightarrow$ Gaußの超幾何方程式

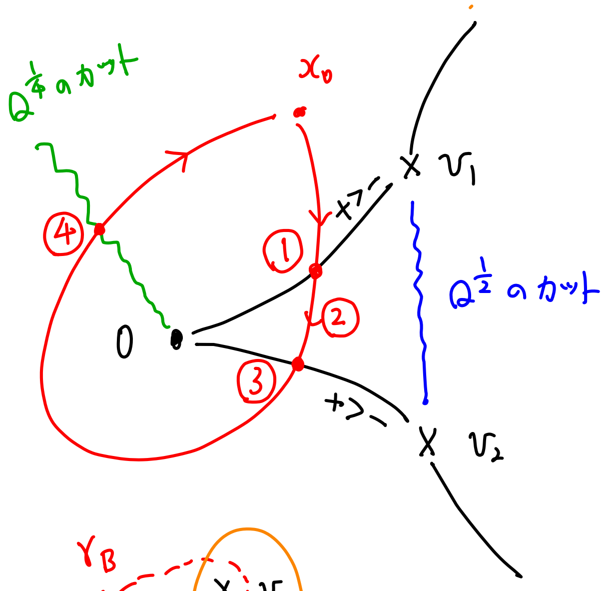
$\theta = 0$ の Stokes グラフ $\boxed{x\text{平面}}$

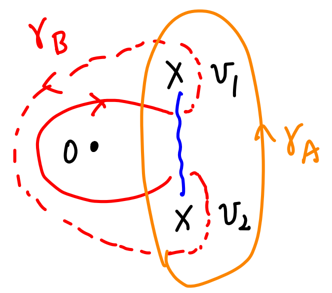


$\psi_\pm$: $x = v_1$ で正規化された WKB 解を用いて計算する.

$$\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{P_{odd}}} \exp\left(\pm \int_{v_1}^{x} P_{odd}\, dx\right), \quad \sqrt{P_{odd}} = \frac{\hbar^{1/2}}{Q(x)^{1/4}} (1 + \underbrace{O(\hbar)}_{x\text{について}1\text{価}}) \leftarrow \text{多価.}$$

$Q(x)^{1/4}$ の分枝を決める新たな cut が必要.





Re $\int_{v_1}^{x} \sqrt{Q}\, dx > 0$ (x near 0) と仮定しておく。

① $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} = S_1$: Voros の公式

② 正規化のとりかえ

$$\begin{bmatrix} \exp(\frac{1}{2} V_{\gamma_A}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{1}{2} V_{\gamma_A}) \end{bmatrix} = D_2$$

③ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} = S_3$: Voros の公式

$\frac{1}{Q^{1/4}}$ の分枝のズレ

④ $$\begin{bmatrix} \exp(\frac{1}{2} V_{\gamma_B}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{1}{2} V_{\gamma_B}) \end{bmatrix} \times \underbrace{e^{\frac{1}{2}(-2\pi i)}} = D_4$$

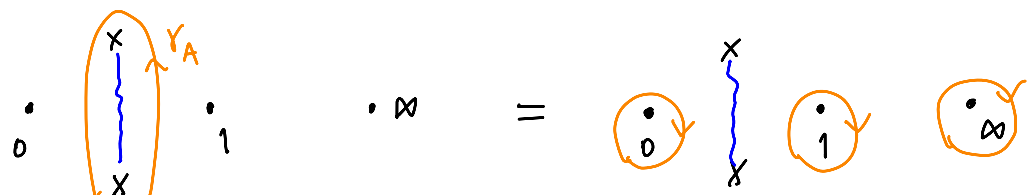
$Q(x) \sim \frac{\cancel{\ }}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{Q^{1/4}} \sim \cancel{\ }\, x^{\frac{1}{2}}$

ゆえにモノドロミー行列は

$$M = D_4 S_3 D_2 S_1.$$

モノドロミー行列 M の固有値は $\exp\left(\pm \frac{1}{2}(V_{\gamma_A} + V_{\gamma_B}) - \pi i\right)$,

そして, Voros係数は



$$V_{\gamma_A} = -2\pi i \sum_{p=0,1,\infty} \underbrace{\operatorname*{Res}_{x=p} P_{odd}\, dx}$$

$x=p$ における特性指数

$\rho(\rho+1) - \frac{A}{\hbar^2} = 0$ 解

$Q = \frac{A}{x^2} + \cdots$

こんな感じで

$$V_{\gamma_A} + V_{\gamma_B} = 2 \operatorname*{Res}_{x=0} P_{odd}\, dx = 2\,(x=0 \text{での特性指数}).$$

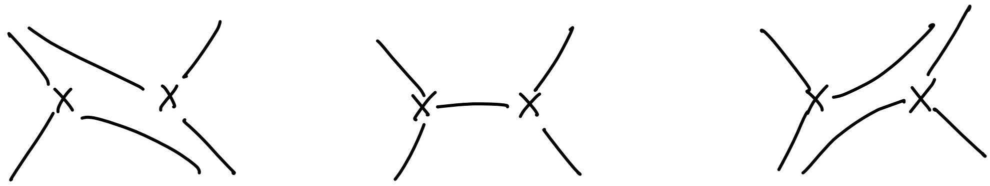
モノドロミーが特性指数で書ける。

$\boxed{\text{超幾何での } W_\beta(\hbar)}$ (Aoki, ...)

$$W_\beta = \sum \frac{(2^{2n-1}-1) B_{2n}}{2n(2n-1)} \frac{\hbar^{2n-1}}{(\alpha-\beta)^{2n-1}} + \sum \text{——} \frac{\hbar^{2n-1}}{(\beta-\gamma)^{2n-1}} + \text{有限和}.$$

たぶん Contiguity relation のような差分的対称性が関係しているんだろうな。

明日



こんな場合を考えるとクラスターの構造が見えてくる。